Детерминанти

Дефиниција: Нека a,b,c,d се реални броеви. Шемата $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ќе ја сметаме за реален број еднаков со ad-bc, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ и ќе ја викаме **детерминанта од втор ред**.

Својства:

1. Детерминанатата не се менува ако редиците си ги размениме местата со соодветните колони т.е колоните се рамноправни со редиците $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

2. Ако во една детерминанта редиците (колоните) си ги променат местата тогаш се добива детерминанта со спротивен знак т.е $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

3. Ако во детерминаната кон едната редица (колона) се додадат соодветните елементи од другата редица (колона) помножени со ист број к тогаш детерминантата не се менува т.е

$$\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix} = a(d+kc) - c(b+ka) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb) - b(c+ka) = ad - bc$$

Дефиниција: **Детерминанта од трет ред** подразбираме квадратна шема од девет реални броеви $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$ сместени во три редици и три колони, а нејзиното значење е определено со помоШ на детерминанти од втор ред на следниот начин:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Овде детерминантата е развиена по првата редица, а детерминантите од втор ред се нарекуваат минори. Можеме да ја развиеме по било која редица или колона.

Детерминаната од трет ред можеме да ја пресметаме и со **Сарусовото правило**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 .$$

Детерминантите можеме да ги искористиме за решавање на систем линеарни равенки користејЌи го Крамеровото правило.

Задачи:

1. Пресметај ги детерминантите од втор ред:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a+1 & c+1 \\ c-1 & a-1 \end{vmatrix}$

Решение:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 2\cdot(-3) = 2+6 = 8$

б) $\begin{vmatrix} a+1 & c+1 \\ c-1 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)-(c-1)(c+1) = a^2 - 1 - c^2 + 1 = a^2 - c^2$

2. Реши ги равенките:

а) $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ x-3 & 2x \end{vmatrix} = 0$

Решение:

а) $4(x+1)-12 = 0 \Leftrightarrow 4x+4-12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$

б)

$$2x(x+1)+2(x-3) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow D = 4+12 = 16$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$$

3. Реши ја неравенката:

а) $\begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} > 0$ б) $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ -5 & x+2 \end{vmatrix} > 0$

Решение:

а) $2(x-1)-(x+1) > 0 \Leftrightarrow 2x-2-x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 3; (3, \infty)$

4. Со помош на детерминанти (Крамерово правило) да се решат следниве системи линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 3x-7y=5 \\ x+4y=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+6y=2 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

Решение:

а) Ако $\Delta \neq 0$ тогаш системот има единствено решение.

Ако $\Delta = 0, \Delta_x = 0 \vee \Delta_y = 0$ тогаш системот има бесконечно многу решенија.

Ако $\Delta = 0, \quad \Delta_x \neq 0, \quad \Delta_y \neq 0$ тогаш системот нема решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12+7 = 19 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 20+56 = 76,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24-5 = 19$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{76}{19} = 4, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1$$

б) Слично.

5. Пресметај ја детерминантата од трет ред со развивање на елементите по некоја редица или колона:

а) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Решение:

а) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

б) Слично.

6. Со помош на Сарусовото правило реши ги детедминанти:

а) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Решение:

а) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0 + abc + abc - 0 - 0 - 0 = 2abc$

б) Слично.

7. Со помош на детерминанти (Крамерово правило) реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + 10y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + ay = 3 \\ ax + z = 2 \\ y + az = 1 \end{cases}$ $a \neq -1$

Решение: а)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 46$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -1$$

б) Слично.