Равенки и неравенки во $\mathbb{R}$

1. Решете ја равенката: $-2(3x-6)=\frac{3}{2}\left(3-\frac{1}{2}x\right)$

Решение: $-2(3x-6)=\frac{3}{2}\left(3-\frac{1}{2}x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ -6x+12=\frac{9}{2}-\frac{3}{4}x\ /\cdot 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -24x+48=18-3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -24x+3x=18-48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -21x=-30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-30}{-21}=\frac{10}{7}$

2. Решете ја неравенката: $4-\frac{2}{3}x\geq-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

Решение: $4-\frac{2}{3}x\geq-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\ /\cdot 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24-4x\geq-3x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x+3x\geq 4-24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x\geq-20\ /\cdot(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\leq 20$

т.е. решение на неравенката се сите реални броеви од интервалот $(-\infty,20]$.

3. Решете го системот неравенки: $\begin{cases}2x-4<0\\3x>1\end{cases}$

Решение: $\begin{cases}2x-4<0\\3x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x<4\\x>\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2\\x>\frac{1}{3}\end{cases}$

Решение на првата неравенка е интервалот $(-\infty,2)$.

Решение на втората неравенка е интервалот $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$.

Решение на системот неравенки ќе биде пресекот на претходните два интервала: $(-\infty,2)\cap\left(\frac{1}{3},\infty\right)=\left(\frac{1}{3},2\right)$.

4. Скицирајте го графикот на следните функции:

а) $-y-2x-1=0$ г) $4x-3+2y=0$

б) $-x=2y+1$ д) $3-x=\frac{1}{2}y$

в) $-y+2x=5$ ѓ) $2y+3x-6=0$

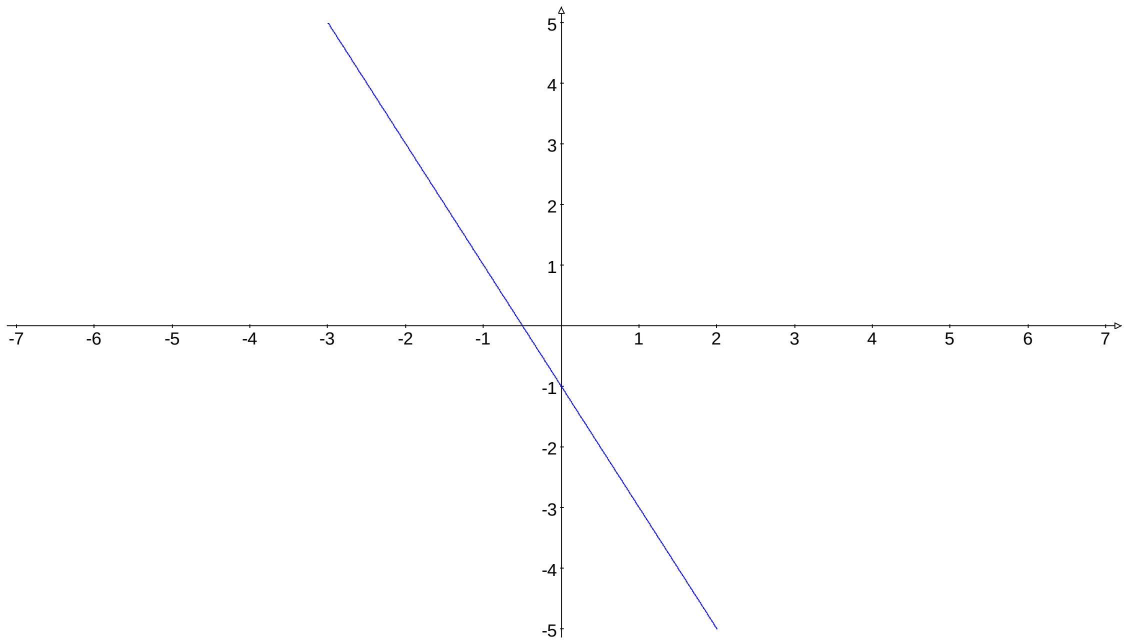
Решение: Дадените функции се линеарни функции од една реална променлива. Графикот на линеарна функција е права. За да ја скицираме секоја од правите, потребни и доволни ни се де точки (секоја права е определена со две точки).

а) $y=-2x-1$

$x=0 \Rightarrow y=-1$

$x=-1 \Rightarrow y=1$

Точките $(0,-1)$ и $(-1,1)$ ја определуваат бараната права.

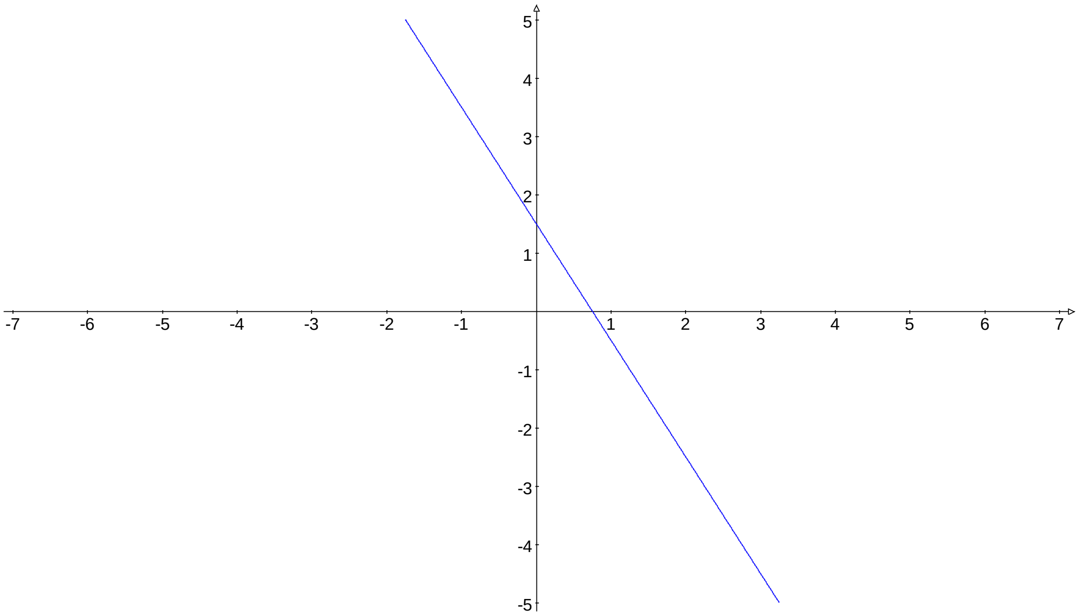


г) $y=-2x+\frac{3}{2}$

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

$$x=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

Точките $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ и $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ ја определуваат бараната права.



5. Скицирајте го графикот на следните функции:

а) $y=x^2-4x+3$ в) $y=x^2-2$

б) $y=-x^2+2$ г) $y=-x^2+2x-8$

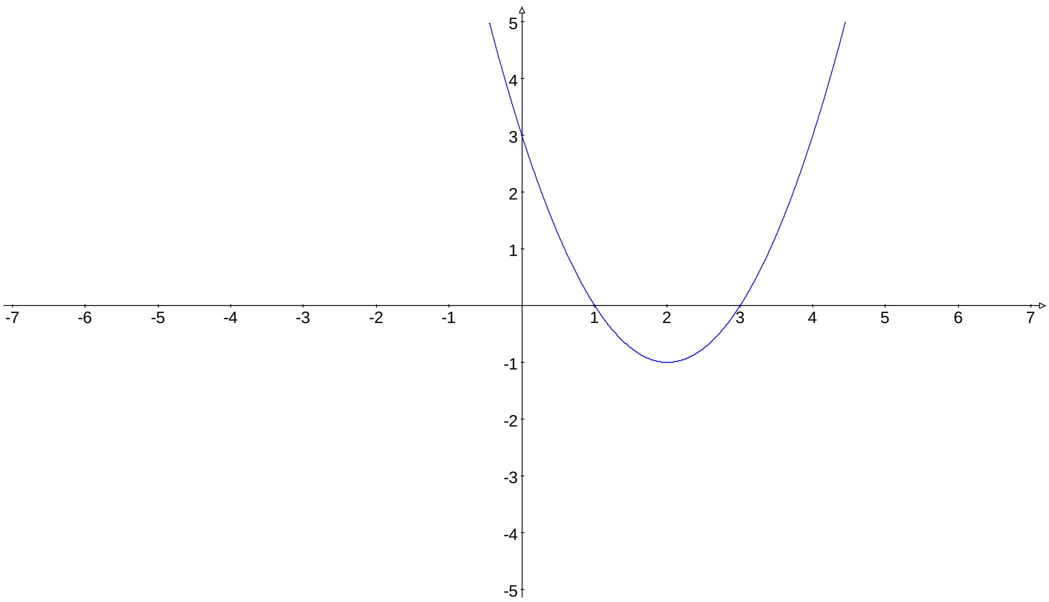
Решение: Дадените функции се квадратни функции од една реална променлива. Графикот на квадратна функција е парабола, свртена нагоре доколку коефициентот пред квадратниот член е позитивен реален број, а свртена е надолу доколку коефициентот пред квадратниот член е негативен реален број.

За да ја скицираме параболата доволно е да ги најдеме нулите на функцијата кои ни ги претставуваат пресечните точки на параболата со $x-$оската и да го најдеме темето на параболата. Темето на параболата е точка $T(\alpha,\beta)$ т.ш. $\alpha=\frac{-b}{2a}$ и $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$, или $\beta=f(\alpha)$, каде $y=f(x)=ax^2+bx+c$ е општ облик на квадратна функција. Важи $a\neq 0$, бидејќи во спротивно ќе се анулира квадратниот член и функцијата ќе биде линеарна.

а) $y=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3x=0 \Leftrightarrow x=1$ или $x=3$.

$\alpha=2$; $\beta=-1$, т.е. темето на параболата е точката $T(2,-1)$.

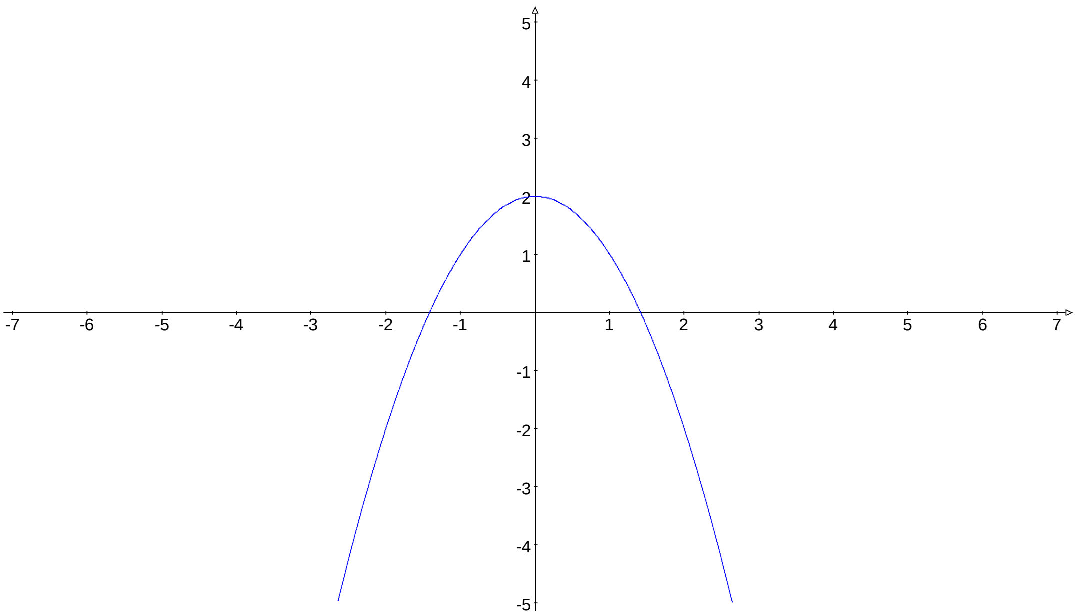
Коефициентот пред квадратниот член е позитивен број, значи параболата е свртена нагоре.



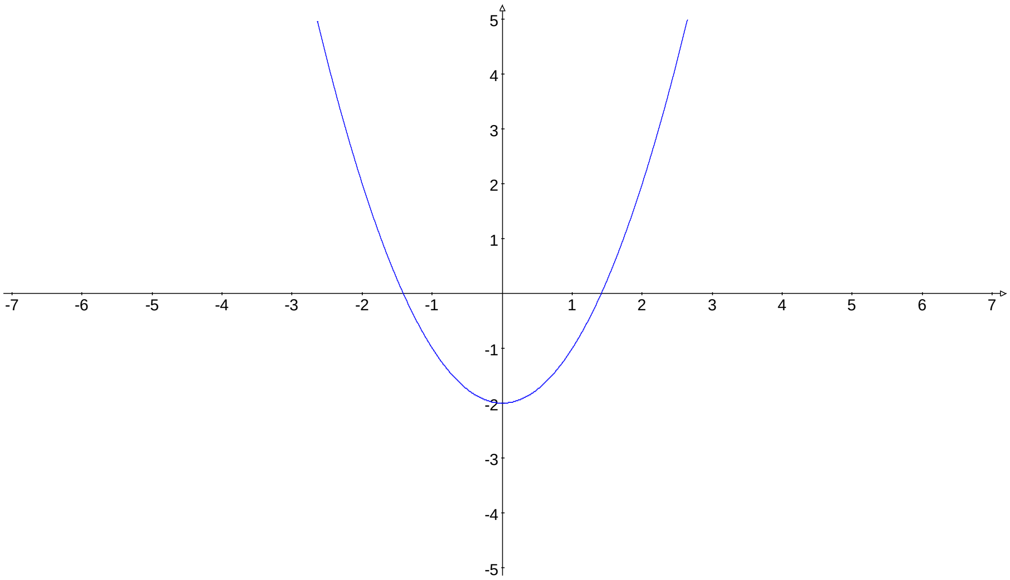
б) $-x^2+2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ или $x=\sqrt{2}$.

$$T(\alpha,\beta)=T(0,2)$$

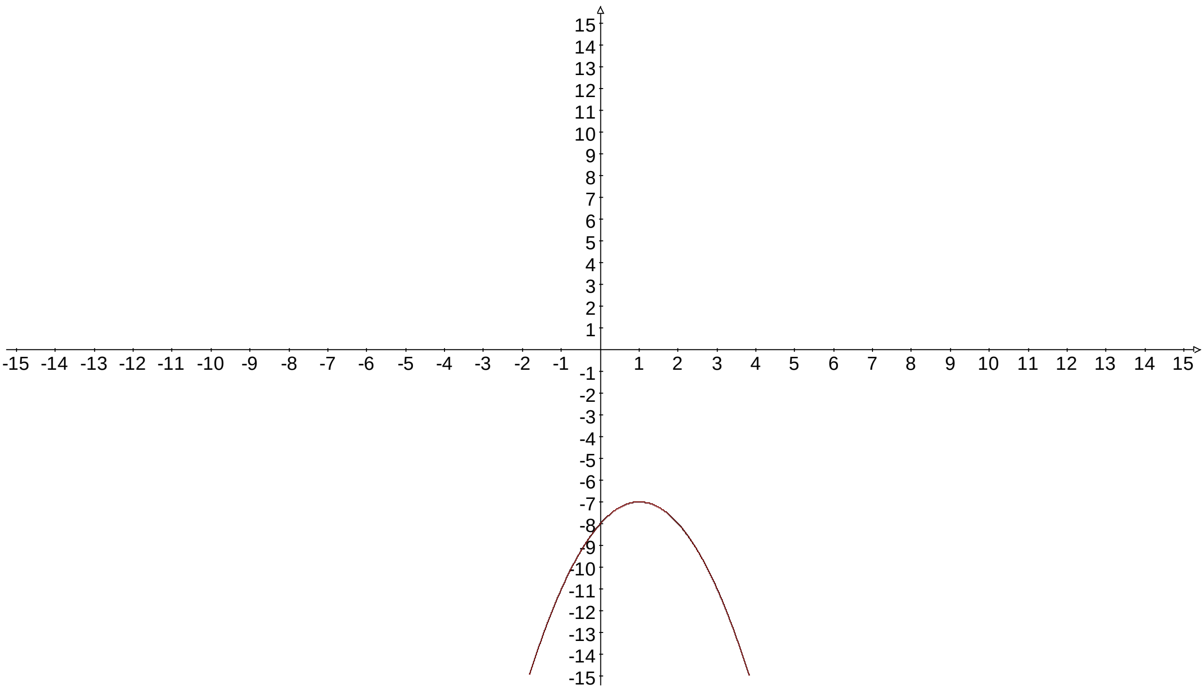
Параболата е свртена надолу, бидејќи коефициентот пред квадратниот член е негативен број.



в) $y = x^2 - 2$



г) $y = -x^2 + 2x - 8$

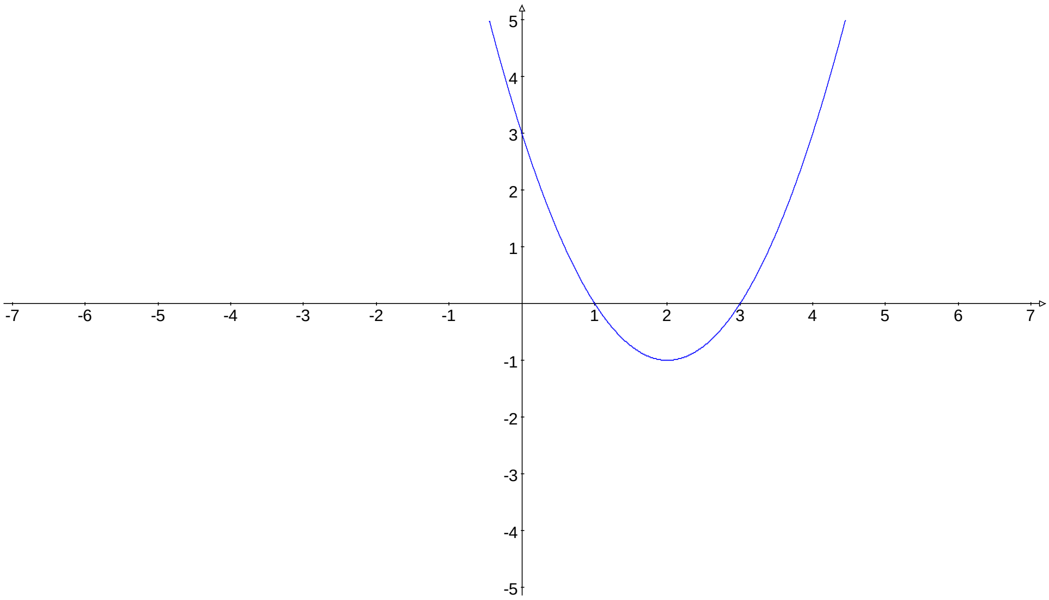


6. Решете ги следните квадратни неравенки:

а) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ б) $-x^2 + 2 < 0$

Решение: Квадратна неравенка можеме да решиме ако прво го скицираме графикот на соодветната квадратна функција (т.е. ја скицираме соодветната парабола) и потоа разгледуваме кога параболата е над $x-$оската (тогаш $f(x)>0$), а кога е под $x-$оската (тогаш $f(x)<0$).

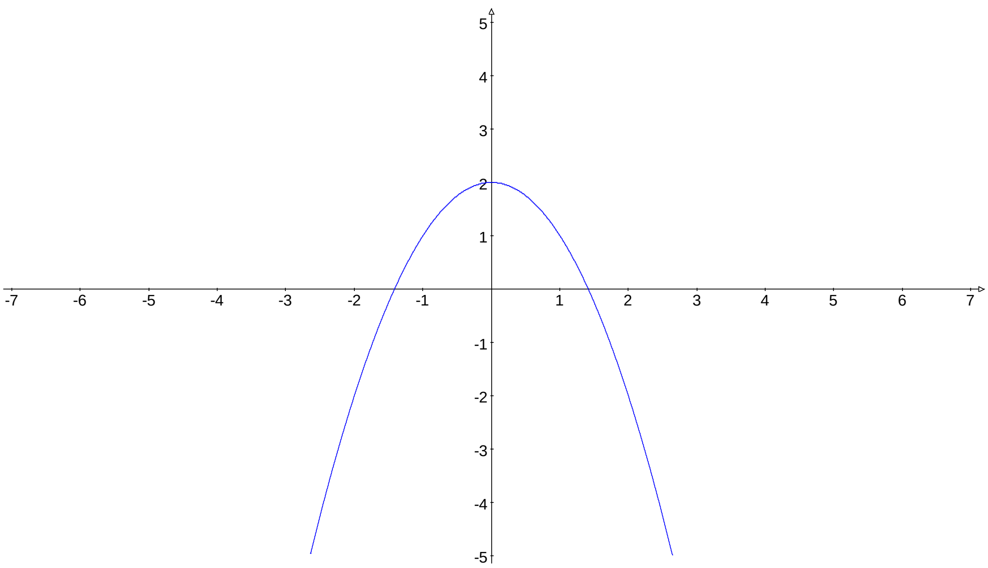
а) Го скицираме графикот на функцијата $y=x^2-4x+3$. Тоа е параболата на сликата подолу. Параболата е над $x-$оската кога $x-$се движи во интервалите $(-\infty,1]$ и $[3,\infty)$.



Значи, $x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[3,\infty)$.

Кога x прима вредности од интервалот $(1,3)$, важи: $f(x)<0$ што се гледа јасно од графикот. Значи, $x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow x\in(1,3)$.

б) Ја скицираме параболата $y=-x^2+2$:



Од графикот гледаме: $-x^2+2<0 \Leftrightarrow y<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$;

$-x^2+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

Постои уште еден начин да решиме квадратна неравенка: соодветниот квадратен трином да го разложиме на множители и да разгледуваме кога производот ќе биде позитивен, а кога негативен број.

Квадратниот трином ax^2+bx+c го разложуваме на множители на следниот начин: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, каде x_1 и x_2 се корените на соодветната квадратна равенка.

Да ја решиме на овој начин неравенката од примерот под а).

Најпрво ги наоѓаме решенијата на квадратната равенка $x^2-4x+3=0$. Нејзини решенија се: $x_1=1$ и $x_2=3$, од каде: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

Според тоа, $x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\geq 0$.

Разгледуваме кога последниот производ е ненегатвен. Производот е ненегативен доколку и двата множитела се со исти знак:

$(x-1)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1\leq 0 \\ x-3\leq 0 \end{cases}$, т.е.

$(x-1)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x\leq 1 \\ x\leq 3 \end{cases}$.

Решение на првиот систем е интервалот $[3,\infty)$, а решение на вториот систем е интервалот $(-\infty,1]$. Даденото неравенство ќе биде задоволено за сите вредности на x кои припаѓаат во двата наведени интервала.

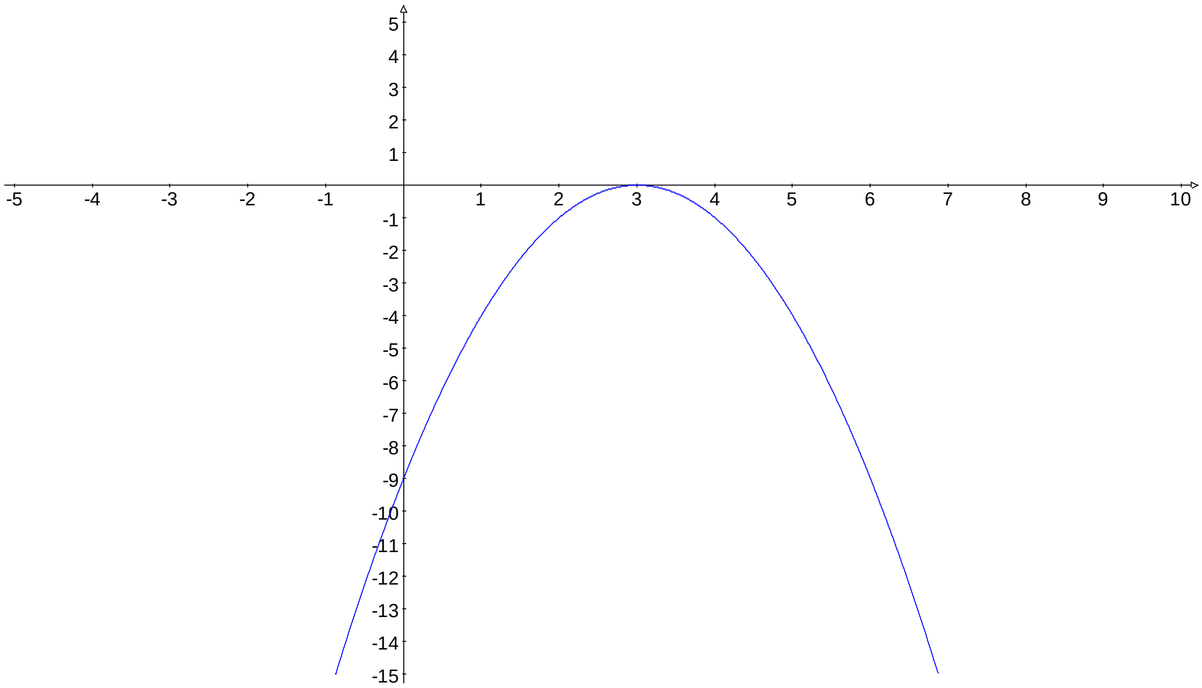
Значи, $x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[3,\infty)$.

7. Решете ги следните неравенки:

а) $-x^2+6x-9>0$ в) $-x^2+6x\leq 0$

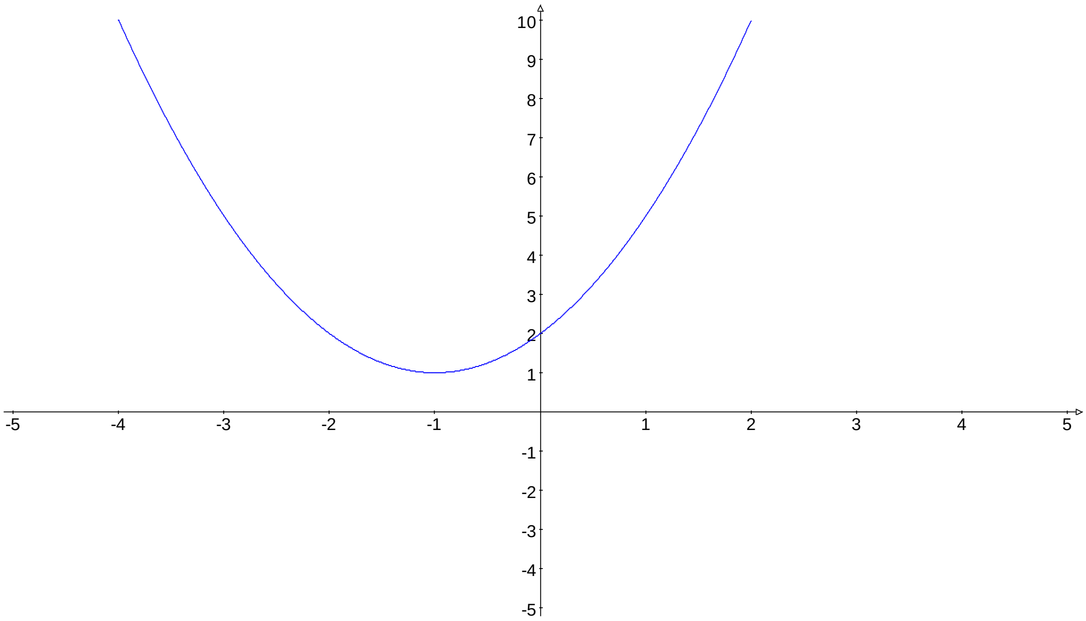
б) $x^2+2x+2<0$ г) $-2x^2-4x-2>0$

Решение: а) Ја скицираме прво параболата $y=-x^2+6x-9$.



Од графикот се гледа дека не постои вредност за x за која параболата ќе биде над x- оската, т.е не постои вредност за x за која ќе важи $y>0$. Заклучуваме дека множеството решенија на оваа неравенка е празно.

б) $x^2+2x+2<0$



Од графикот гледаме дека целата парабола е над x- оската, т.е. не постои вредност на x за која $y=x^2+2x+2<0$.

Заклучуваме дека и оваа неравенка нема решенија во множеството на реални броеви.